Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Lördagen den 9 januari 2016 klockan 08.30-11.30 i hörsalar på hörsalsvägen.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-7723182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 09.30 och 10.30.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

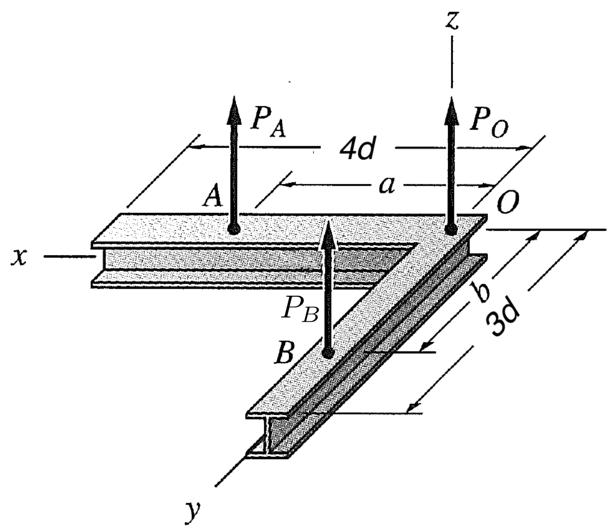
- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 9 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst tre poäng och 3-5 poäng ger betyg 3, 6-7 poäng ger betyg 4 och 8-9 poäng ger betyg 5.

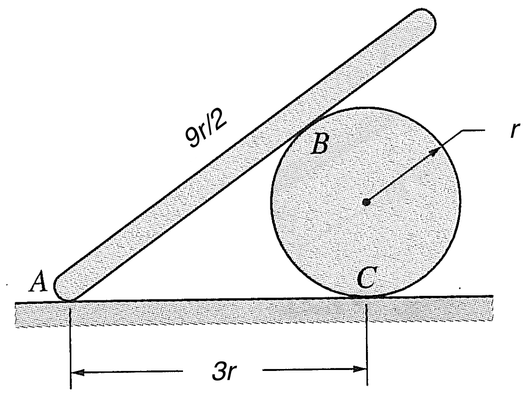
Rättningsgranskning: Datum och plats meddelas via mail (för studenter registrerade i PingPong) och via kurshemsidan.

Uppgifter

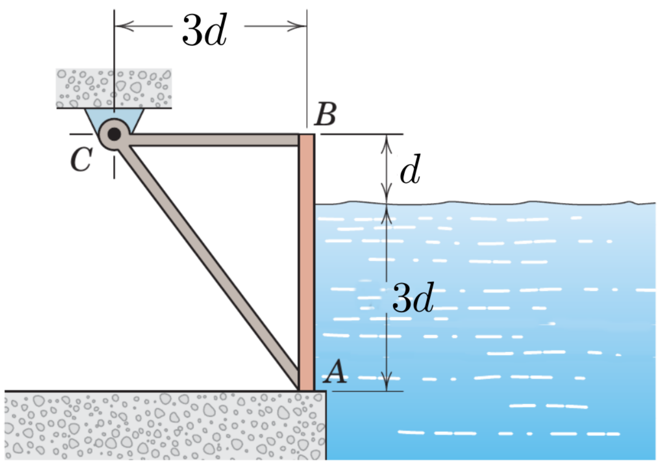
1. Den L-formade homogena balken med totala längden $7d$ hålls i jämvikt med tre vertikala kablar, fästa i punkterna A, B och O, och som ger upphov till krafterna P_A, P_B och P_O. Bestäm avstånden a och b så att krafterna i de tre kablarna blir lika stora.



2. Den homogena stången med längden $\frac{9}{2}r$ och den homogena cylindern med radien r har vardera massan m. Vad är det *minsta* värdet på den statiska friktionskoefficienten μ_s i punkterna A, B, och C (OBS μ_s samma i de tre kontaktpunkterna), för vilket jämvikt kan råda?
Ledning: Du får använda att $\sin\theta = \frac{3}{5}$ och $\cos\theta = \frac{4}{5}$ utan härledning, där θ är vinkeln mellan stången och underlaget. Detta gör att algebran blir enklare.



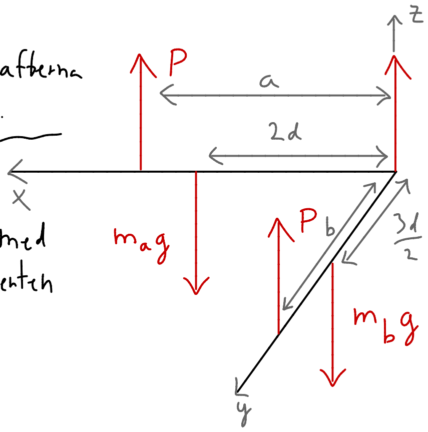
3. Figuren visar tvärsnittet av en rektangulär dammlucka med höjd $4d$ och bredd $6d$ (vinkelrät mot papprets plan), vilken blockerar en kanal fylld med vatten. Dammluckan har massan M och är fäst i en horisontell axel (vilkelrät mot papprets plan) genom C. Beräkna den vertikala kraften P med vilken betongfundamentet trycker på dammluckan i punkten A. Ramen (C till B och C till A) i vilken dammluckan fäster betraktas som masslös. (Dammluckan utgör med andra ord strukturen i bilden mellan A och B.)



Lycka till!

1)

Sökt: Avstånd a, b s.a. krafterna från upphängningen är lika.



I figuren är balken frilagd med tyngdkraften från de två segmenten separerade.

Moment kring O:

$$\vec{M}_O = a\hat{i}\times P\hat{z} + b\hat{j}\times P\hat{k} + 2d\hat{i}\times(-m_a g\hat{z}) + \frac{3d}{2}\hat{j}\times(-m_b g\hat{k})$$

$$= -aP\hat{j} + bP\hat{i} + 2dm_a g\hat{j} - \frac{3d}{2}m_b g\hat{i}$$

Momentjämvikt $\vec{M}_O = 0$ tillsammans med kraftjämvikt i z-led:

$$\begin{array}{l} \circlearrowleft M_x \\ \circlearrowleft M_y \\ \uparrow z \end{array} \begin{cases} bP - \frac{3d}{2}m_b g = 0 & \Rightarrow \quad b = \frac{3d}{2}\frac{m_b g}{P} \quad (1) \\ -aP + 2dm_a g = 0 & \Rightarrow \quad a = 2d\frac{m_a g}{P} \quad (2) \\ 3P - (m_a + m_b)g = 0 & \Rightarrow \quad P = \frac{(m_a+m_b)g}{3} \quad (3) \end{cases}$$

Antag längddensitet ρ för balken, då gäller

$$\begin{cases} m_a = 4d\rho \\ m_b = 3d\rho \end{cases}$$

Insättning av (3) i (1) o (2) ger nu

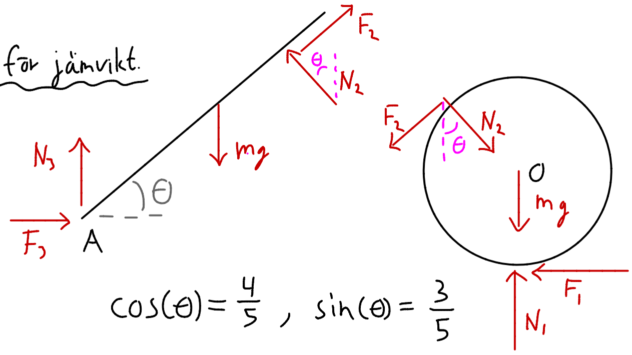
$$a = 2d\frac{4d\rho}{\frac{7}{3}d\rho g}g = \frac{24}{7}d$$

$$b = \frac{3d}{2}\frac{3d\rho}{\frac{7}{3}d\rho g}g = \frac{27}{14}d$$

(enheterna stämmer uppenbart)

2) Sökt: Minsta μ_s för jämvikt.

Friläggning av stång och cylinder:



Jämvikt för stången: $\cos(\theta) = \frac{4}{5}$, $\sin(\theta) = \frac{3}{5}$

$$\uparrow: \quad N_3 - mg + \frac{4}{5}N_2 + \frac{3}{5}F_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\rightarrow: \quad F_3 - \frac{3}{5}N_2 + \frac{4}{5}F_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft A: \quad -\frac{4}{5}\cdot\frac{9r}{4}mg + 3rN_2 = 0 \qquad (3)$$

Jämvikt för cylinder:

$$\uparrow: \quad N_1 - mg - \frac{4}{5}N_2 - \frac{3}{5}F_2 = 0 \qquad (4)$$

$$\rightarrow: \quad -F_1 + \frac{3}{5}N_2 - \frac{4}{5}F_2 = 0 \qquad (5)$$

$$\circlearrowleft O: \quad rF_2 - rF_1 = 0 \qquad (6)$$

$(3) \Rightarrow N_2 = \frac{3}{5}mg \qquad (6) \Rightarrow F_1 = F_2$

$(5) \Rightarrow F_2 = \frac{5}{9}\,\frac{3}{5}\cdot N_2 = \frac{1}{5}mg$

$(4) \Rightarrow N_1 = (1 + \frac{12}{25} + \frac{3}{25})mg = \frac{8}{5}mg$

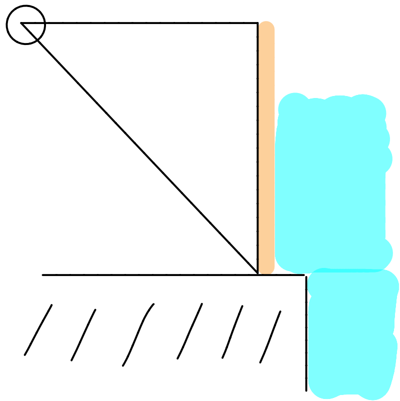
$(2) \Rightarrow F_3 = (\frac{9}{25} - \frac{4}{25})mg = \frac{1}{5}mg$

$(1) \Rightarrow N_3 = (1 - \frac{12}{25} - \frac{3}{25})mg = \frac{2}{5}mg$

Villkor för maximal friktion är $F_i = \mu_s N_i \Rightarrow \mu_s = \frac{F_i}{N_i}$

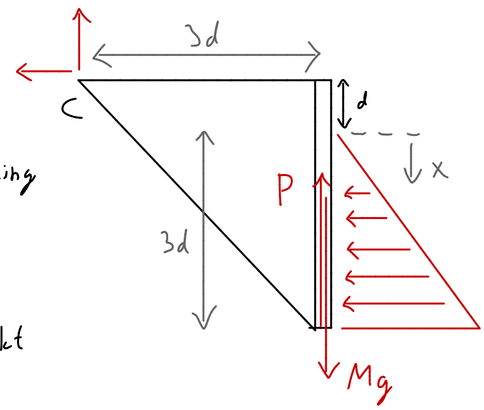
$\frac{F_1}{N_1} = \frac{1}{8}$, $\frac{F_2}{N_2} = \frac{1}{3}$, $\frac{F_3}{N_3} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Minsta möjliga μ_s utan glidning i alla punkter är $\mu_s = \frac{1}{2}$.

3) Sökt: Kraften P från fundament på dammlucka.



Betrakta dammluckan tillsammans med ramen som ett system.

Friläggning:



Vattentrycket vid djup x i friläggning ges av $p(x) = x\rho g$.

Från friläggning ser man att P är den enda obekanta i momentjämvikt kring C.

$$M_C^{vatten} = -\int_0^{3d} \underbrace{(d+x)}_{\text{hävarm}} \underbrace{x\rho g}_{p(x)} \underbrace{6d\,dx}_{dA}$$

$$= -6\rho g d \left[\frac{d x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^{3d}$$

$$= -3\cdot 27\cdot \rho g d^4$$

$\circlearrowleft C$: $3dP - 3d\,Mg - 3\cdot 27\,\rho g d^4 = 0$

$\Longrightarrow P = 27\rho g d^3 + Mg$

$[\rho g d^3] = \frac{kg}{m^3}\frac{m}{s^2}\cdot m^3 = \frac{kg\,m}{s^2}$